

RASSEGNA SCIENTIFICA

La geometria descrittiva a quattro dimensioni

del prof. GIUSEPPE VERONESE.

Se nelle scuole del passato, mentre un maestro di geometria insegnava che il punto nasce dall'intersezione di due linee, e la linea dalla intersezione di due superficie, uno scolare avesse richiesto: *quali enti geometrici debbono intersecarsi fra loro, perchè si ottenga la superficie*, che cosa avrebbe risposto il signor maestro? O piuttosto, quali idee sarebbero sorte nella sua immaginazione? Certamente se, in passato, un allievo avesse potuto muovere questa interrogazione, un qualche maestro, se non il suo proprio, avrebbe anche potuto rispondere; ma per uno scolare che avesse fatta questa dimanda ve ne sarebbero stati cento, pronti a canzonarlo, e per un maestro capace di rispondere, altri cento maestri e scolari incapaci di comprendere la risposta: per cui il miglior partito, cui avesse potuto appigliarsi il malcapitato docente, capace di rispondere, sarebbe stato quello di non rispondere, allegando la difficoltà d'esser compreso, il tempo troppo breve per dilucidare la questione, e simili; e tali ragioni non sarebbero mai state accampate da un maestro a più buon dritto. Oggi le cose sono un po' mutate, si è più schietti, più coraggiosi, almeno in geometria, e quando si sa rispondere, si risponde. Alla dimanda del supposto allievo, oggi il maestro risponde: la superficie è l'intersezione di due enti geometrici a tre dimensioni, un ente geometrico a tre dimensioni, è l'intersezione di due enti geometrici di quattro, e se l'allievo è infarinato d'algebra, gli si dice: un ente geometrico ad n dimensioni è l'intersezione di due enti geometrici ad $n+1$ dimensioni, od anche: chiamasi spazio ad n dimensioni quello nel quale un punto riesce determinato da n condizioni.

Non è la prima volta che nell'Aula di questo Ateneo, si parla di tali dottrine. Nella tornata 28 gennajo 1869, io ebbi l'onore di tener parola intorno alla geometria con n dimensioni, però limitando il mio dire, a certi concetti generali, che esposi assai brevemente, e senza entrare in particolari. Questi studj erano allora poco coltivati in Italia. Non dirò che oggi sieno divenuti popolari; ma certo, hanno fatto un gran passo.

Dal lato analitico molto era stato fatto, precipuamente da Gauss, da Riemann, da Helmholtz e da Jordan fra gli stranieri, ed in Italia dai chiarissimi Betti, Battaglini e Beltrami. Geometricamente parlando, tutto mancava. Nessuno che io mi sappia, aveva ancora escogitata una genesi geometrica degli spazi superiori, e vuolsi perciò rendere il dovuto onore al chiarissimo dott. Giuseppe Veronese, professore di geometria analitica all'Università di Padova, il quale con metodo ingegnoso e semplicissimo stabilì la genesi superiormente indicata, segnando a larghi tratti il processo generale per lo studio completo della geometria con qualunque numero di dimensioni, aprendo orizzonti veramente nuovi, e mostrando nuove strade per giungere a verità novelle, anche nella geometria ordinaria, o per dimostrare con processi assai luminosi, verità già conosciute.

Qui dovrei dire del suo bellissimo lavoro, pubblicato nei *Mathematisch*, e *Annalen* redatti da F. Klein e da A. Mayer (Leipzig) Tomo XIX (¹), nel quale, a vero dire, stanno i veri fondamenti e la ragione di essere di quell'altro che fu da lui presentato al Veneto Istituto e che si intitola:

Sulla Geometria Descrittiva a quattro dimensioni; ma è solo di questo ultimo che ebbi dall'Ateneo l'incarico di parlare, perciò restringo ad esso il mio dire, premettendo alcune nozioni che io credo necessarie, almeno pei giovani lettori poco in là cogli studi geometrici.

Premesse

Cominciamo collo stabilire che il nostro ambiente sia accolto da un ambiente a quattro dimensioni, e questo da uno a cinque e via dicendo.

Mentre lo spazio a tre dimensioni contiene punti rette e piani quello a quattro dimensioni contiene, oltre questi elementi, anche

(¹) Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens.

spazi a tre dimensioni. Di questi, alcuni sono per esso, quello che sono i piani per l'ambiente ordinario, vale a dire: uno spazio a tre dimensioni giace egualmente fra i suoi piani, una porzione di spazio può scorrere nel restante spazio con perfetta congruenza e senza restrizione, una retta sega uno spazio a tre dimensioni, in un punto, e se ha due punti in esso vi giace tutta. Questo principio, che una retta sega in un punto, uno degli indicati spazi, è sommamente caro agli spiritisti, perchè con esso spiegano agevolmente la comparsa e scomparsa di oggetti e di persone dai recipienti e dai locali perfettamente chiusi. Questi spazi segati da una retta in un solo punto, si chiamano *spazi lineari* od anzhe *spazi piani*; essi sono analiticamente rappresentati da equazioni di primo grado non omogenee a quattro variabili, oppure omogenee a cinque variabili. Intendiamo di parlare sempre di questi spazi. Un piano sega uno spazio lungo una retta, e se ha tre punti in esso vi giace tutto. Due spazi si segano in un piano, e se oltre quel piano, hanno un punto comune, coincidono in uno solo. Dunque uno spazio è determinato da un piano e da un punto esterno, oppure da due rette comunque poste, oppure da quattro punti comunque presi. Il prof. Veronese genera lo spazio a tre dimensioni proiettando tutti i punti d'un piano, da un punto esterno al medesimo, ed estende questa genesi agli spazi di 5 di 6 . . . di n dimensioni. La genesi in discorso è una estensione di quella notissima che si dà del piano, nell'ordinaria geometria « il piano è il luogo della retta che movendosi intorno ad un punto fisso rade una retta fissa non passante per il medesimo ». Così possiamo dire: « Nell'ambiente fondamentale a quattro dimensioni, facendo muovere una retta intorno ad un punto fisso, colla condizione che vada incontrando un piano fisso, si genera lo spazio a tre dimensioni ». A questa genesi come a quella, prima citata, del piano, può muoversi l'obbiezione fatta, io credo, dal prof. Genocchi, il quale osserva che, senza l'intervento dei punti all'infinito non si giunge a completare il piano; ma si generano due falde opposte. Una genesi che io credo immune da questa obbiezione è la seguente: un piano è il luogo della retta che movendosi intorno ad un punto d'un circolo s'appoggia al medesimo continuamente. Il circolo può darsi *a priori* come il luogo del punto che ha intervalli eguali e costanti da due punti fissi. Quindi per analogia: una retta che si muove intorno ad un punto d'una sfera ordinaria incontrando sempre la sfera, genera lo spazio a tre dimensioni. Queste due genesi non ammettono interruzione. Nell'una viene completato il piano, nell'altra lo

spazio, senza far ricorso agli elementi situati all'infinito; per il piano le due porzioni generate simultaneamente vengono, per così dire, saldate insieme lungo la toccante del circolo nel punto fisso; per lo spazio le due porzioni generate simultaneamente dalla retta mobile, sono riunite insieme secondo il piano toccante la sfera nel punto fisso. Per una retta passa una serie doppiamente infinita di piani e di spazi. L'intersezione di due spazi in un piano, avviene *necessariamente*. Quindi tre spazi si segano *necessariamente* in una retta, e perciò due piani s'incontrano *necessariamente* in un punto. Ma se due piani si segano in una retta, stanno in uno spazio a tre dimensioni. Quattro spazi segantisi in un punto danno origine ad una importante configurazione che costituisce il *quadrispigholo* completo della geometria a quattro dimensioni; si ottengono sei piani, due opposti s'incontrano in quel punto comune ai quattro spazi, e due consecutivi in una retta che passa per quel punto. I piani diagonali sono *opposti* e s'incontrano in quel punto. Segando tutta la figura con uno spazio, si ottiene il quadrilatero sghembo della ordinaria stereometria.

Uno spazio a tre dimensioni è generato anche da un piano che si move intorno ad una retta fissa ed incontra continuamente un piano fisso che si sega con quella retta. Sulle intersezioni di due spazi, il prof. Veronese stabilisce sin da principio un bel teorema che suona così: Se n è il numero delle dimensioni dello spazio fondamentale, p e q i numeri delle dimensioni di altri due spazi in esso accolti, essi si segheranno in uno spazio le cui dimensioni saranno $p+q-n$. È chiaro in primo luogo che uno spazio di $n-1$ dimensioni ed una retta si segano in un punto, così uno spazio di $n-2$ dimensioni ed un piano, ed in generale si segheranno in un punto due spazi, l'uno di $n-\alpha$ dimensioni l'altro di α dimensioni, e posto allora $n-\alpha=p$; $\alpha=q$; sarà $n-q=p$; cioè $p+q-n=0$. Così uno spazio di $n-3$ dimensioni ed un piano si segano in una retta, uno di $n-4$ dimensioni ed uno spazio si segano pure in una retta, e si segheranno pure in una retta due spazi, l'uno di $n-\alpha$ dimensioni e l'altra di $\alpha+1$ dimensioni, e posto $n-\alpha=p$; $\alpha+1=q$; ne viene $\alpha=n-p$, $n-p+1=q$; ossia $p+q-n=1$. Più generalmente, se uno spazio è di $n-\alpha$ dimensioni ed uno di $\alpha+\beta$ dimensioni, posto $n-\alpha=p$; $\alpha+\beta=q$, sarà $\alpha=n-p$; quindi $n-p+\beta=q$; ossia $\beta=p+q-n$. Se si trovasse β negativo, vorrebbe dire che i due spazi non si segano necessariamente. Sopra tre rette poste in un ambiente fondamentale a quattro dimensioni, si può deporre una retta unica. Sieno a b c le tre rette, i tre

spazi (ab) (ac) (bc) si segano in una retta unica che si appoggia a tutte e tre. Infatti lo spazio (ab) è intersecato dalla retta c in un punto da cui si conduce una retta unica ad appoggiarsi sulle a e b ed il punto (ab) (c) apparterrà allo spazio (bc); ma esso è intersecato dalla retta a in un punto, dunque (a) (bc) appartiene alla congiungente di quei due punti; ma esso appartiene anche agli altri due spazi dunque ecc.

Parallelismo

Il Veronese indica tutti gli spazi lineari, in ordine crescente delle loro dimensioni, come segue: R_0 R_1 R_2 . . . R_n ; R_0 è il punto, R_1 la retta, R_2 il piano ecc. La lettera R è l'iniziale del vocabolo tedesco *Raum* spazio.

Lo spazio fondamentale R_4 possiede all'infinito uno spazio R_3 che si può indicare così R_3^∞ . Due spazi R_3 (1) R_3 (2) sono paralleli se il loro piano all'infinito è comune. Uno spazio R_3 ed un piano R_2 sono paralleli se si segano in una retta situata all'infinito. Dice il Veronese che due piani sono paralleli se si segano in una retta situata all'infinito; ma abbiamo fatto osservare che se due piani si segano in una retta, essi sono accolti da uno spazio R_3 locchè costituisce una giacitura particolare per i due piani; non sarebbe più generale il parallelismo di due piani se avessero all'infinito il loro punto d'incontro? Due piani possiedono all'infinito rispettivamente due rette che stanno in R_3^∞ e generalmente parlando, esse non s'incontrano; se i due piani sono paralleli, al modo ora indicato, quelle due rette hanno un punto comune. Una retta ed un piano non si incontrano necessariamente nè a distanza finita, nè a distanza infinita; ma se l'incontro di questi due elementi avvenisse a distanza infinita, la retta ed il piano sarebbero in un ambiente R_3 . Dato adunque un piano R_2 ed un punto R_0 , si otterrebbe uno spazio R_3 ed in questo spazio si possono condurre per R_0 infinite rette parallele ad R_2 , secondo il concetto della ordinaria stereometria; esse sarebbero tutte in un piano R_2 (1) parallelo ad R_2 ; tutti i piani che passano per quelle rette, senza giacere in R_3 sarebbero paralleli ad R_2 nel senso superiormente indicato. Dunque per una retta parallela ad un piano, passa una serie semplicemente infinita di piani paralleli al piano dato. Una retta è parallela ad uno spazio, se lo incontra a distanza infinita.

Ortogonalità

Il prof. Veronese stabilisce l'ortogonalità sulla base d'un concetto d'origine analitica, cioè sulla considerazione degli elementi immaginari all'infinito.

Per comodità del giovane lettore riporteremo questo concetto come esso è svolto nella geometria ordinaria. Premetto che restiamo in geometria euclidea. Sulla retta reale che il piano possiede all'infinito, esistono due punti immaginari detti *punti ciclici* perchè comuni a tutti i circoli di quel piano. Infatti un angolo costante che rota intorno al proprio vertice, traccia sopra qualunque retta del piano due divisioni omografiche che hanno i punti uniti immaginari, quindi due tali divisioni saranno tracciate anche sulla retta all'infinito del piano. Se sul piano vi sia un circolo, e due punti fissi del medesimo sieno i centri di due fasci omografici i cui raggi corrispondenti si incontrino sempre sul circolo, questi raggi faranno sempre un angolo costante; ora prendiamo un punto qualunque sul piano e per esso conduciamo due rette continuamente parallele a due raggi corrispondenti, esse formeranno sempre il medesimo angolo che sarà eguale a quello inscritto nel circolo, ed avremo così un angolo costante che rota intorno al proprio vertice e che, sulla retta all'infinito, del piano, traccierà le stesse divisioni omografiche tracciate dai fasci che hanno i centri su quel circolo; dunque i punti doppi immaginari saranno quei medesimi; ma quei punti sono le intersezioni di quel circolo colla retta posta all'infinito, dunque il circolo in discorso sega la retta all'infinito in quei due punti immaginari. Conservando invariato l'angolo, tenendo immobile il punto preso sul piano e facendo variare la posizione del circolo, le due divisioni omografiche tracciate sulla retta all'infinito, restano ancora le medesime. Mutando l'angolo, le due divisioni omografiche non saranno più le medesime; ma i punti doppi saranno ancora gli stessi perchè essi si ottengono dal passaggio del vertice mobile, per i due punti d'intersezione (reali o immaginari) del circolo colla retta; dunque tutti i circoli del piano passano per quei due punti immaginari all'infinito. Nella *involuzione quadratica*, che è un caso particolare della *omografia*, i punti doppi fanno armonia con una coppia di punti corrispondenti, ed è noto che se intorno ad un punto fisso rota un angolo retto, i lati di esso descrivono sopra una qualunque retta del piano, due divisioni omografiche in involuzione, dunque ciò avverrà

anche su quella retta all'infinito del piano. Ciò premesso, se due rette sono fra loro ortogonali, esse incontrano la retta all'infinito in due punti che sono coniugati armonici coi punti ciclici che sono i punti doppi delle due divisioni omografiche in involuzione descritte dai lati dell'angolo retto che ruota col suo vertice intorno ad un punto fisso del piano. Dunque, due rette sono ortogonali se i loro punti all'infinito formano armonia coi punti ciclici. Lo spazio ordinario possiede all'infinito un piano reale; sia ora una sfera in questo spazio; segandola con un piano questo segnerà il piano all'infinito in una retta, e quella sfera in un circolo, e questi due elementi si segheranno in due punti immaginari, qualunque sia, del resto, la sfera presa nello spazio ordinario; ma ad ogni piano secante la sfera, si troveranno in quel piano all'infinito, due nuovi punti ciclici, dunque facendo muovere liberamente il piano secante, si otterranno sempre nuove coppie di punti ciclici appartenenti a quella sfera ed al piano all'infinito; ma una sfera ed un piano si segano in un circolo, dunque quel piano all'infinito possiede un circolo immaginario comune a tutte le sfere dello spazio. Il Veronese ha osservato che è più proprio, considerare questo elemento immaginario come una conica, invece che come un circolo, opinione divisa dal Klein, perchè il cono che ha il vertice nel centro della sfera e che è sempre secato da un piano passante per il centro di essa, lungo due rette che vanno ai punti ciclici, è certamente del secondo ordine; ma il piano all'infinito non ha una determinata direzione e quindi non lo sega generalmente in un circolo. Ad ogni modo il Veronese, chiama questa conica circolo immaginario. Ora è facile stabilire le seguenti cose: se una retta ed un piano sono fra loro ortogonali, il punto e la retta, secondo i quali il piano all'infinito è incontrato da quella retta e da quel piano, sono rispettivamente polo e polare rispetto a quella conica. Infatti sia a la retta, α il piano, P_∞ il punto all'infinito della retta, R_∞ la retta all'infinito del piano. Se per a si fa passare un piano β , questo sega α in una retta b che ha all'infinito un punto Q_∞ e siccome a e b sono ortogonali, i punti P_∞ Q_∞ fanno armonia coi punti ciclici che sono in R_∞ ; ma quei punti appartengono alla conica immaginaria dunque ecc. Se due piani sono ortogonali, le loro rette all'infinito saranno coniugate armoniche con quella conica immaginaria. Infatti conducendo un piano perpendicolare a quei due, esso li segnerà in due rette ortogonali, i cui punti all'infinito faranno armonia con quei due punti ciclici secondo i quali il piano

segante incontrerà la conica immaginaria. Nella geometria astratta cioè in quella che ammette possibili due distinte parallele di un punto ad una retta data, ed in quella che il ch. De Tilly chiama doppiamente astratta, in cui queste due parallele sono immaginarie, si ammette che la retta abbia all'infinito due punti (reali od immaginari), che il piano possieda all'infinito una conica (reale od immaginaria) e finalmente che lo spazio possieda all'infinito una quadrica (reale od immaginaria). Allora due rette del piano sono ortogonali se fanno armonia colle due tangenti condotte alla conica dal loro punto di concorso. Una retta ed un piano sono ortogonali se sono coniugati armonici col cono che ha il vertice nel loro punto d'incontro ed è tangente alla quadrica situata all'infinito. Due piani sono ortogonali se formano armonia cogli altri due condotti per la loro retta d'intersezione tangenzialmente alla quadrica *assoluta*, che tale è il nome che si dà a quella quadrica situata all'infinito dello spazio. Passiamo allo spazio di quattro dimensioni. In questo spazio chiamasi *sfera* il luogo del punto che ha distanza costante da un punto fisso; ma questo elemento possiede una dimensione di più della sfera ordinaria, e produce una sfera ordinaria quand'è segata da uno spazio lineare a tre dimensioni. Tutte le sfere a tre dimensioni esistenti nello spazio fondamentale a quattro dimensioni hanno in comune una sfera ordinaria immaginaria giacente in R_3^∞ ; essa è il luogo di tutti quei cerchi immaginari che si ottengono facendo muovere lo spazio R_3 che sega la detta sfera. Una retta ed uno spazio sono fra loro ortogonali se il punto all'infinito della retta ed il piano all'infinito dello spazio, sono rispettivamente polo e polare rispetto alla sfera immaginaria che sta all'infinito. Un piano ed uno spazio sono fra loro ortogonali, se la retta all'infinito del piano ha la sua coniugata, rispetto alla sfera immaginaria giacente nel piano all'infinito dello spazio. Due spazi sono ortogonali se i loro piani all'infinito sono coniugati colla sfera immaginaria. Finalmente due piani sono ortogonali se le loro due rette all'infinito sono coniugate colla sfera immaginaria. Nella geometria astratta l'*assoluto* dello spazio a quattro dimensioni è un quadrica (reale o immaginaria) a tre dimensioni. Due spazi sarebbero ortogonali quando facessero armonia con altri due passanti per il loro piano d'intersezione e toccanti quella quadrica.

Da un punto d'uno spazio R_3 non gli si può condurre che una perpendicolare, perchè il piano all'infinito di R_3 ha un unico polo

rispetto alla sfera immaginaria, il quale polo è il punto all'infinito di quella perpendicolare. Per la stessa ragione da un punto esterno non si può condurre a quello spazio che una perpendicolare. Per risolvere quest'ultimo problema si descrive una sfera a tre dimensioni col centro nel punto dato; essa sarà segata dal dato spazio in una sfera a due dimensioni, ed il centro di quest'ultima sarà il piede della cercata perpendicolare, e basterà congiungerlo col punto dato, per ottenere detta perpendicolare. Per risolvere poi l'altro problema di elevare da un punto d'un dato spazio la perpendicolare al medesimo, si risolve il precedente per qualunque punto dello spazio, e condotta la perpendicolare, si conduce poi per il punto dato la parallela a questa. Abbiamo veduto che per un piano passa una serie semplicemente infinita di spazi a tre dimensioni; gli è come dire che uno spazio può rotare intorno ad un proprio piano tenuto fisso. Se immaginiamo per un punto di questo piano condotta la perpendicolare allo spazio, in una sua posizione iniziale, al muoversi dello spazio si potrà supporre che la perpendicolare pure si mova, mutando posizione per restar sempre perpendicolare al detto spazio. Quindi se due spazi aventi in comune un piano, diverranno coincidenti, lo stesso sarà delle loro perpendicolari, se verrà l'un d'essi, colla rotazione, a porsi in continuità dell'altro, le due perpendicolari torneranno a coincidere, però verranno a porsi in continuazione l'una dell'altra, le due porzioni che prima coincidevano. Così bisogna concepire la rotazione d'uno spazio intorno ad un suo proprio piano. Durante questo movimento, i vari punti dello spazio mobile descrivono dei cerchi. Infatti se immaginiamo una perpendicolare PM condotta al piano α per cui passa lo spazio R_3 , ed M un punto di detto spazio, nell'ambiente R_3 non sarà possibile condurre per P altre perpendicolari ad α ; ora ad ogni posizione dello spazio mobile, cambia di posto il punto M , restando immobile P , e non muterà punto la lunghezza PM ; anzi quella perpendicolare mobile descrive un piano che riesce perpendicolare ad α nel punto P . Ad un dato piano non si può, per una retta esterna condurre, generalmente parlando, un piano perpendicolare. Infatti dato un piano, la sua retta all'infinito, avrà, rispetto alla sfera immaginaria, per coniugata, una certa retta la cui posizione non è punto arbitraria, nè si può esigere neppure che passi per un determinato punto. Ora se fosse data la retta per la quale deve passare il piano perpendicolare al dato, sarebbe stabilito anche il punto all'infinito da essa posseduto dunque ecc. Ma

per meglio comprendere la cosa, sia α un piano, P un punto esterno al medesimo; per P abbasseremo una perpendicolare unica ad α ; sia Q il piede di questa, da Q potremo elevare un piano unico β perpendicolare ad α , e desso conterrà il punto P, dunque per un punto P esterno ad un piano si può condurre un piano solo perpendicolare al dato; l'esigere adunque che il piano perpendicolare al dato, passi per due dati punti, o per una retta, è problema più che determinato.

Il Veronese distingue i teoremi ed i problemi in *proiettivi* e *metrici*. Qui mi permetterei alcune osservazioni che il ch. autore non deve considerare come appunti al suo modo di vedere; ma come l'espressione del mio. Il ch. prof. Bellavitis (*Geometria Descrittiva* pag. 73, nota al capo I del libro II ediz. I 1851) distingue le proprietà delle figure in grafiche e metriche; sono proprietà grafiche per esempio, l'allineamento retto di più punti, o il concorso di più rette in un punto, o il contatto delle curve; insomma tutte quelle proprietà che si riferiscono alle disposizioni delle parti d'una figura; sono *proprietà metriche* certe relazioni analitiche fra le grandezze delle parti d'una figura; per esempio il teorema di Pitagora, il teorema di Tolomeo, i teoremi di Ceva e di Menelao e simili. Le proprietà grafiche sono tutte proiettive, vale a dire si traducono da una figura ad una prospettiva piana, cioè ad un'altra figura, ottenuta segnando, con un piano, una piramide che ha per base la prima. Infatti se nella figura primitiva tre punti sono in linea retta, sarà lo stesso dei loro tre prospettivi; tuttavia l'espressione della proprietà richiede molte volte d'essere modificata o generalizzata. Per esempio: le tre mediane d'un triangolo si incontrano in un punto; ma le prospettive delle tre mediane non sono le tre mediane del triangolo prospettivo; a rendere completa la proiettività bisogna modificare l'enunciato come segue. Dati sul piano un triangolo ed una retta, questa segnerà i tre lati in tre punti; cercando i coniugati armonici di questi punti, e congiungendoli coi vertici opposti, le tre congiungenti si incontreranno in un punto. Ora facendo la prospettiva piana di questa figura, otterremo una nuova retta segante i lati del triangolo prospettivo, e le tre nuove rette concorrenti in un punto, incontreranno i lati opposti in punti che pure sono coniugati armonici di quelli in cui la retta interseca i lati, perchè la divisione armonica è per sé stessa proiettiva. Si sa che il punto di mezzo d'un segmento rettilineo è il coniugato armonico di quello che sta all'infinito, allineato coi suoi estremi e siccome il piano possiede una retta all'infinito, è

dezza che sega i lati del triangolo in tre punti i cui coniugati armonici sono i punti di mezzo dei lati stessi. Così le tre bisettrici degli angoli d'un triangolo, e quelle dei supplementi, essendo rispettivamente ortogonali, intersecano la retta all'infinito in tre coppie di punti che formano armonia coi due punti ciclici, e che perciò sono in involuzione. Ora proiettando da un punto dello spazio questa figura, e facendone una prospettiva piana, si otterrà un nuovo triangolo; ma le sei rette prospettive delle bisettrici, non saranno bisettrici, formeranno però fasci armonici coi lati, e segheranno la prospettiva della retta, in sei punti formanti involuzione. Meritano il nome di proiettive tutte le proprietà indipendenti dal postulato delle parallele, oppure dagli elementi all'infinito, o, se vuolsi, dagli elementi fissi di riferimento. Nella geometria descrittiva, per esempio, sono proiettivi i problemi che si riferiscono all'intersezione di due piani, alle tracce d'una retta; e sono metrici quelli che si riferiscono alle distanze di punti. Le moderne considerazioni di geometria astratta, hanno tolta la discrepanza fra gli elementi all'infinito delle due geometrie *locale* e *tangenziale*, ed hanno resa proiettiva tutta la *metrica*. Restando in geometria euclidea, se intendiamo che l'involuzione, i teoremi di Ceva e Menelao etc., sieno *metrici*, siccome essi sono proiettivi, non possiamo più distinguere le proprietà in metriche e proiettive. Ma come dissi più sopra, è quistione di forma se non di sostanza.

Stabiliti questi principi generali riescirà agevole il comprendere i metodi rappresentativi dell'egregio autore. Il primo metodo che egli spiega è quello della proiezione centrale. Con questo metodo, nella geometria, ordinaria si rappresentano gli oggetti proiettandoli da un punto e segnando la piramide proiettante, con un piano (quadro o campo delle immagini). Nota la distanza dal centro di proiezione a questo piano, si descrive nel piano un circolo col centro nel piede di detta distanza e con raggio eguale alla distanza stessa (circolo di distanza). Un punto *immagine* appartiene a tutti i punti del raggio proiettante, cioè rappresenta qualunque punto di esso. Una retta è pienamente determinata dalla sua traccia e dal suo punto di fuga, cioè dalla traccia della retta condotta dal centro di proiezione parallelamente alla data. Invero fra le infinite rette che hanno quella traccia, una sola ha quel punto di fuga. Quindi per determinare un punto bisogna conoscere una retta che passa per esso. Un piano è determinato dalla sua traccia e dalla sua retta di fuga. Nella geo-

metria a quattro dimensioni, il campo delle immagini è uno spazio a tre dimensioni, la determinazione del punto e della retta si ottiene al modo istesso. Quanto al piano, bisogna determinare le rette di fuga, cioè si determina lo spazio dato dal piano e dal centro di proiezione, ed in esso, per il centro di proiezione si conduce il piano parallelo al dato, esso sega il campo delle immagini in una retta che è la retta di fuga. Uno spazio è determinato dalla sua traccia sul campo delle immagini, la quale è un piano, e dal suo piano di fuga che ottiensi conducendo per il centro di proiezione uno spazio parallelo al dato, e determinando il suo piano d'intersezione col campo delle immagini. Se due rette sono in uno stesso piano, la congiungente delle loro tracce sarà parallela alla congiungente dei loro punti di fuga perchè queste due rette sono le intersezioni del campo delle immagini con due piani paralleli. Un piano ed una retta giacciono in uno spazio R_3 se hanno un punto comune, locchè generalmente non avviene. Allora se per un punto della retta per il piano si conduce lo spazio a tre dimensioni, esso resterà sempre il medesimo anche se si prende un altro punto della retta. Quindi segnando la figura ottenuta col primo punto, mediante uno spazio a tre dimensioni, e poi segnando collo stesso spazio la figura ottenuta, facendo uso del secondo punto, si otterrà per sezione, sempre il medesimo piano; ma se la retta ed il piano dati, non hanno un punto comune, cioè non sono in uno spazio a tre dimensioni, ogni punto della retta, assieme al piano, porge uno spazio differente, e quindi l'intersezione di un qualsivoglia spazio a tre dimensioni, con questo spazio variabile, sarà un piano sempre diverso, da cui una regola per riconoscere se la retta ed il piano sono in un medesimo spazio a tre dimensioni. Così se due piani sono in uno stesso spazio a tre dimensioni, cioè se hanno una retta comune, assunto l'uno di quei piani ed un punto del secondo, qualunque esso sia, con questi elementi si otterrà sempre il medesimo spazio a tre dimensioni; quindi segnando, con uno spazio fisso, le figure ottenute col prendere un punto dell'uno dei piani, e facendo variare questo punto, o si otterrà il medesimo piano, per sezione, o non si otterrà; nel primo caso i due piani saranno in uno stesso spazio a tre dimensioni, nel secondo no. Queste soluzioni sono un po' diverse da quelle dell'egregio autore. (Vedi pag. 11). I limiti che ci sono imposti non ci permettono di dilungarci; l'Autore protrae la trattazione di questo metodo sino alla pag. 25 offrendo parecchi interessanti esempi di problemi metrici e proiettivi.

L'autore viene posto a trattare della posizione ortogonale fatta in due spazi paralleli a distanza conosciuta. Una retta è data dalle sue tracce nei medesimi, un piano dalle sue rette (tracce) ed uno spazio dai suoi *piani tracce*. L'angolo d'una retta con uno di queglii spazi, è ottenuto mediante l'arrovesciamento del triangolo che ottiensi proiettando ortogonalmente in uno degli spazi la traccia della retta sull'altro. L'angolo d'un piano con uno degli spazi si ottiene conducendo un piano perpendicolare alla traccia del dato ed allo spazio; allora l'intersezione di questo piano al detto spazio, riuscirà perpendicolare alla traccia in discorso e queste due rette formeranno il cercato angolo di cui sarà facile ottenere l'arrovesciamento. L'Autore determina poi l'angolo d'uno spazio con uno dei dati, e scioglie molte altre interessanti questioni.

Passa poi l'Autore alla trattazione della geometria descrittiva secondo il sistema di Monge esteso alle quattro dimensioni. Due spazi ortogonali costituiscono il sistema di riferimento. Invece di una retta fondamentale si ha un piano fondamentale; l'uno degli spazi si fa rotare intorno a questo piano finchè si pone in continuazione coll'altro; così si fa uso d'uno spazio solo come nella geometria descrittiva ordinaria, si fa uso d'un piano solo. I due spazi, o meglio le due porzioni dell'unico spazio, sono separate dal piano fondamentale. Un punto ha due proiezioni nei due spazi e la retta che le congiunge riesce perpendicolare al piano fondamentale. Una retta ha due tracce e due proiezioni, il ribaltamento o la rappresentazione in uno degli spazi si ottiene ribaltando il solito triangolo rettangolo i cui elementi sono conosciuti. Un piano ha due tracce rettilinee che si incontrano in un punto del piano fondamentale; la rappresentazione si ottiene conducendo un piano perpendicolare ad uno degli spazi coordinati ed alla corrispondente traccia, l'intersezione di questo piano col coordinato è una retta che incontrerà in un punto il piano fondamentale; da quel punto si eleva la perpendicolare al piano fondamentale, nell'altro spazio coordinato, e verrà incontrata l'altra traccia del piano dato; si potrà allora eseguire l'arrovesciamento come nella geometria descrittiva ordinaria. Noi vorremmo estenderci maggiormente; ma ci limitiamo a questi cenni invitando gli amatori di così begli studi a prender cognizioni più estese nel bellissimo lavoro di cui facciamo questo breve resoconto.

L'ultimo paragrafo del detto lavoro è consacrato al disegno assonometrico ortogonale. L'Autore assume quattro spazi ortogonali e

quindi quattro assi pure ortogonali ed ottiene quelle figure di cui ho parlato nelle premesse. Si ferma a considerare un aggruppamento importante di 16 punti intorno ai quali è già parlato in un altro bellissimo e molto esteso lavoro pubblicato nei nuovi Annali di matematica, e accenna rapidamente a molte importanti quistioni.

Speriamo che il poco che abbiamo detto, e che avremmo pur voluto esprimere più efficacemente, e il nome del valente autore, bastino ad accendere nei giovani l'amore di così belle e feconde dottrine.

Questi metodi rappresentativi possono convincer anche gli scettici che la geometria a quattro o più dimensioni non è una visione di mente egra, ma che i suoi enti possono venir rappresentati mediante i ben conosciuti corpi e figure della geometria ordinaria.

P. CASSANI.

